Clase 4: Continuación

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

Ejemplo 1. *Sea la ED*

$$xu''(x) + (x+3)u'(x) + u(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

una ED con coeficientes <u>variables</u>. Como el coeficiente de $u''(x)$ tiene un cero ($x = 0$) existen ahora soluciones <u>no</u> clásicas. Se pide verificar que $v(x) = \delta(x) + \delta'(x)$ es una solución de la ED. Recordando las relaciones $x\delta^{(k)}(x) = -k\delta^{(k-1)}(x)$ ($k = 1, 2, \cdots$) ya visto, tenemos

$$xv''(x) = x\delta''(x) + x\delta'''(x) = -2\delta'(x) - 3\delta''(x),$$

$$\begin{aligned}(x+3)v'(x) &= x\delta'(x) + x\delta''(x) + 3\delta'(x) + 3\delta''(x)\\ &= -\delta(x) - 2\delta'(x) + 3\delta'(x) + 3\delta''(x)\\ &= -\delta(x) + \delta'(x) + 3\delta''(x)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad xv''(x)+(x+3)v'(x)+v(x) = -2\delta'(x)-3\delta''(x)-\delta(x)+\delta'(x)+3\delta''(x)+\delta(x)+\delta'(x) = 0,$$

listo.

Ejemplo 2. *Sea el ODL con coeficientes variables $L = x^3\dfrac{d}{dx} + 2$. Se pide verificar que*

$$E(x) = \frac{1}{2}\delta(x) \ \text{ es s.f. de } L.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}x^3E'_{gen}(x) &= x^3\frac{1}{2}\delta'(x)\\ &= \frac{1}{2}x^2(x\delta'(x))\\ &= \frac{1}{2}x^2(-\delta(x))\\ &= -\frac{1}{2}x(x\delta(x))\\ &= 0,\end{aligned}$$

porque $x\delta(x) = 0$ *(ya visto).*

$$\Longrightarrow \quad LE(x) = x^3 E'_{gen}(x) + 2E(x) = 0 + 2\frac{1}{2}\delta(x) = \delta(x),$$

listo.

1. Límites en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sea $\{T_n\}$ una sucesión de distribuciones $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Entonces decimos que la sucesión $\{T_n\}$ converge a T en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T \ \ si \ \ n \to \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Observe que los $\langle T_n, \varphi\rangle$ forman una sucesión de números complejos para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fijo y (1) dice que $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T$ si, y sólo si, está sucesión de números converge al número $\langle T, \varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Recíprocamente se puede demostrar que si $\{T_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que existe

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle, \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

define una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Esta propiedad se expresa diciendo que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es completo.

Sea $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T$, entonces para $k = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\langle T_n^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T_n, \varphi^{(k)} \rangle \ \ \longrightarrow \ \ (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle = \langle T^{(k)}, \varphi \rangle, \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

es decir comprobamos que

$$T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T \ \ \Longrightarrow \ \ T_n^{(k)} \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T^{(k)}; \ \ k = 0, 1, 2, \cdots , \tag{2}$$

lo que se expresa diciendo que la derivada distribucional es continua en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La convergencia de una serie infinita en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se define como la convergencia de la sucesión de las sumas parciales, es decir,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \ \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ \ \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \ \ \sum_{n=1}^{N} T_n \overset{\mathcal{D}'(R)}{\longrightarrow} T \ \text{ si } \ N \to \infty \\ \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \ \ &\sum_{n=1}^{N} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} T_n, \varphi \rangle \ \ \longrightarrow \ \ \langle T, \varphi \rangle \ \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ si } N \to \infty \end{aligned} \tag{3}$$

y como $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es completo, cuando $\sum_{n=1}^{\infty}\langle T_n,\varphi\rangle$ converge para todo $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces

$$\langle T,\varphi\rangle := \sum_{n=1}^{\infty}\langle T_n,\varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

define una $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $T=\sum_{n=1}^{\infty}T_n$. Además, según (2)

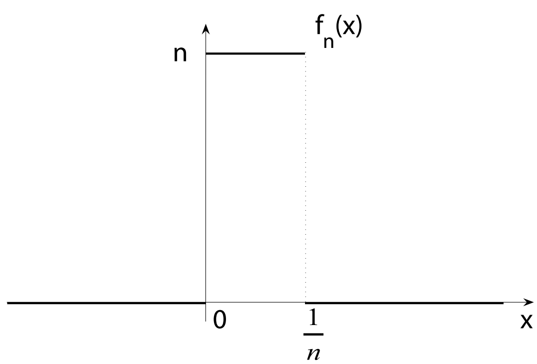
$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n = T \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \implies \sum_{n=1}^{\infty}T_n^{(k)} = T^{(k)};\quad k=0,1,2\cdots. \tag{4}$$

Las propiedades (2), (4) eliminan por completo la problemática que se presenta en el análisis clásico con respecto a la posibilidad de cambiar el orden en las operaciones de tomar el límite y tomar la derivada. Si una sucesión de funciones diferenciables (en sentido clásico) $\{f_n\}$ converge en $\mathbb{R}$ uniformemente a una función límite f, entonces f no tiene porque ser diferenciable (en sentido clásico), y aún si lo es no necesariamente $(f_n)'_{cl}(x)\longrightarrow f'_{cl}(x)$ (en la convergencia puntual usual). Pero f'_{gen} siempre existe y $(f_n)'_{gen}\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} f'_{gen}$ si $n\to\infty$ siempre.

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 3. *Sea*

$$f_n(x)=\begin{cases} n; & 0\le x\le \frac{1}{n};\quad n=1,2,\cdots\\ 0, & \textit{otro caso.}\end{cases}$$



Tenemos $f_n\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ para todo n, de modo que $\{f_n\}$ es una sucesión de distribuciones *regulares. Tenemos para* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_n(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(x)dx$$

$$\stackrel{t=nx}{=} \int\limits_0^1 \varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt \quad \longrightarrow \quad \int\limits_0^1 \varphi(0)dt = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle,$$

de modo que según (1) tenemos que

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \delta \ \ si \ \ n \to \infty.$$

Cuando $n \to \infty$*, la gráfica de* $f_n(x)$ *se aproxima a un "clavo infinitamente alto e infinitamente delgado", mientras que el área bajo la gráfica de* f_n *es igual a* 1 *para todo* n*. De aquí viene la interpretación de Dirac considerando* $\delta(x)$ *como una "función" igual a* 0 *para* $x \neq 0$*, igual a* ∞ *en* $x = 0$ *y tal que el área bajo la gráfica de* $\delta(x)$ *es igual a* 1*:* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$*. Es claro que* *<u>no existe</u>* *una función con características tan exóticas. De hecho ya sabemos que* $\delta(x)$ *es una distribución y no una función.*

Según (2) tenemos $(f_n)'_{gen} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \delta'$*. Pero* $(f_n)'_{gen}(x) = n\delta(x) - n\delta_{\frac{1}{n}}(x)$*, de modo que*

$$n\delta(x) - n\delta_{\frac{1}{n}}(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \delta'(x) \ \ si \ \ n \to \infty,$$

luego

$$n\delta'(x) - n\delta'_{\frac{1}{n}}(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \delta''(x) \ \ si \ \ n \to \infty, \ \cdots, \ \ etc.$$

Más ejemplos se consiguen en la guía de ejercicios resueltos del Profesor P. F. Hummelgens.

2. Cómputo de integrales.

Una <u>aplicación importante</u> del cálculo distribucional es el cómputo de integrales definidas. Antes de dar un ejemplo concreto, es preciso hacer algunas observaciones. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ hemos definido el corchete $\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Esta integral existe porque φ es de soporte compacto. Pero

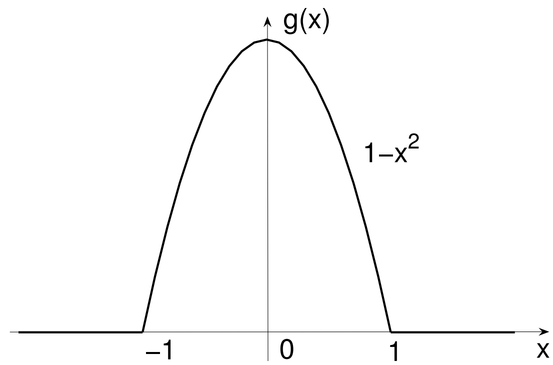
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

también existe si $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ es arbitraria (no necesariamente de soporte compacto) pero f es de soporte compacto, es decir, $\langle f, \phi\rangle$ está bien definido si f o ϕ (o ambas) es de soporte compacto.

Ejemplo 4. *Sea $f(x) = 1 - x^2$; $-1 \le x \le 1$. Se pide hallar $I = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx$ ($n \ge 1$ un entero). Clásicamente se calcula I mediante integración por partes, lo que da un cómputo algo tedioso, pero nuestro novedoso método permite hallar I sin realizar integración alguna (!!!).*

El primer paso es extender $f(x)$ a todo $\mathbb{R}$ definiendo

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2; & -1 \le x \le 1 \\ 0; & \textit{otro } x. \end{cases}$$



Entonces g es de soporte compacto, por lo tanto $\langle g, \phi\rangle$ es bien definido para todo $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Tomamos ahora $\phi(x) = \cos(n\pi x)$, $-\infty < x < \infty$, entonces

$$I = \langle g(x), \phi(x)\rangle. \tag{5}$$

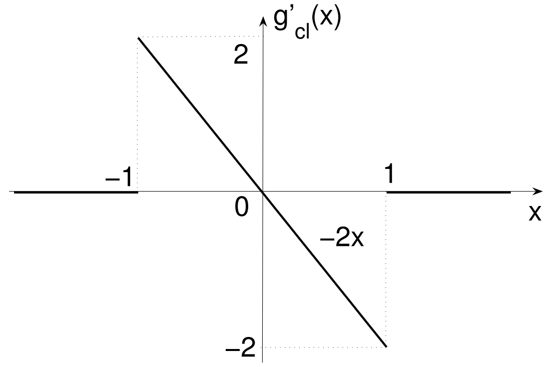
Tenemos $\phi'(x) = -n\pi \operatorname{sen}(n\pi x)$, $\phi''(x) = -n^2\pi^2\cos(n\pi x) \Longrightarrow \phi''(x) = -n^2\pi^2\phi(x)$ ($\phi(x)$ reaparece luego de dos derivaciones). Ahora

$$\langle g''_{gen}(x), \phi(x)\rangle = \langle g(x), \phi''(x)\rangle = \langle g(x), -n^2\pi^2\phi(x)\rangle$$
$$\Longrightarrow \quad -n^2\pi^2 I = \langle g''_{gen}, \phi\rangle. \tag{6}$$

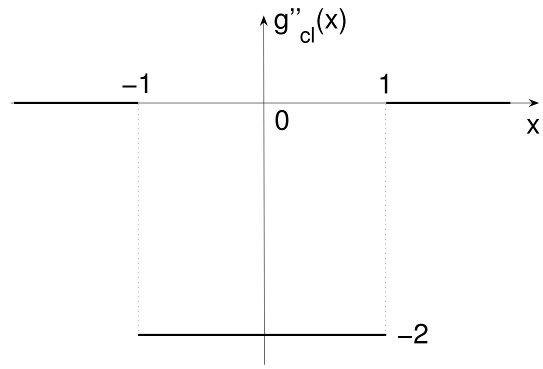
Ahora calculamos $\langle g''_{gen}, \phi\rangle$ y luego despejamos I de (6). Tenemos

$$g'_{gen}(x) = g'_{cl}(x)$$

con gráfica



$$\Longrightarrow \quad g''_{gen}(x) = g''_{cl}(x) + 2\delta_{-1}(x) + 2\delta_1(x)$$



$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle g''_{gen}, \phi\rangle &= \langle g''_{cl}, \phi\rangle + 2\langle \delta_{-1}, \phi\rangle + 2\langle \delta_1, \phi\rangle \\
&= -2\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)dx + 2\phi(-1) + \phi(1) \\
&= (-2)0 + 2\cos(-n\pi) + 2\cos(n\pi) = 4\cos(n\pi) = 4(-1)^n,
\end{aligned}$$

luego con (6)

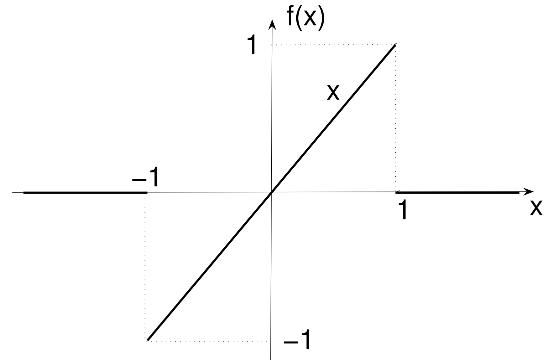
$$I = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Hicimos un cómputo sencillo, usando derivadas generalizadas, y mucho más corto que el método de la integración por partes.

Más ejemplos se consiguen en la guía de ejercicios resueltos del Profesor P. F. Hummelgens. Este tema del cómputo de integrales usando derivadas generalizadas es importante para todo el resto del curso .

Ejemplo 5. *Se pide hallar* $I = \int_{-1}^{1} xe^{2x}dx$*. Sea*

$$f(x) = \begin{cases} x; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0; & otro\ x \end{cases}$$



y $\phi(x) = e^{2x}$*. Entonces* $I = \langle f, \phi \rangle$*. Tenemos*

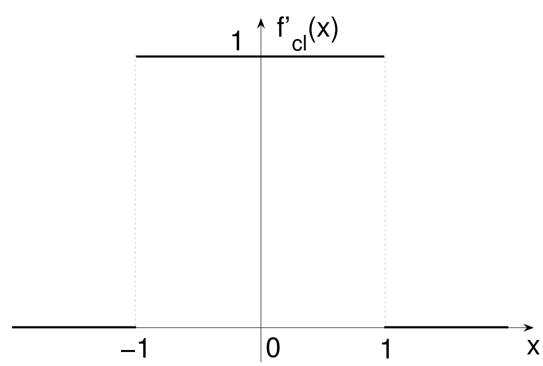
$$\phi'(x) = 2e^{2x}, \quad \phi''(x) = 4e^{2x} = 4\phi(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \langle f''_{gen}(x), \phi(x) \rangle = \langle f(x), \phi''(x) \rangle = 4\langle f, \phi \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad 4I = \langle f''_{gen}, \phi \rangle \tag{7}$$

Pero

$$f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x) - \delta_{-1}(x) - \delta_1(x)$$



$$f''_{gen}(x) = f''_{cl}(x) + \delta_{-1}(x) - \delta_1(x) - \delta'_{-1}(x) - \delta'_1(x), \quad f''_{cl}(x) = 0 \ \ c.s.\ en\ \mathbb{R},$$

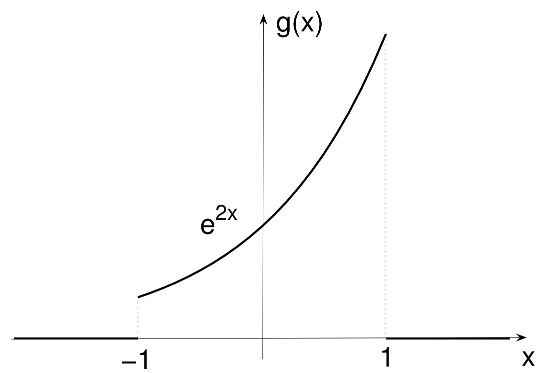
$$\Longrightarrow \quad f''_{gen}(x) = \delta_{-1}(x) - \delta_1(x) - \delta'_{-1}(x) - \delta'_1(x)$$

$$\begin{aligned} \overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad 4I &= \langle \delta_{-1}, \phi \rangle - \langle \delta_1, \phi \rangle - \langle \delta'_{-1}, \phi \rangle - \langle \delta'_1, \phi \rangle \\ &= \phi(-1) - \phi(1) + \phi'(-1) + \phi'(1) = e^{-2} - e^2 + 2e^{-2} + 2e^2 = 3e^{-2} + e^{-2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{4}\left(3e^{-2} + e^2\right).$$

Alternativamente podemos probar

$$g(x) = \begin{cases} e^{2x}; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0; & otro\ x \end{cases}$$



y $\psi(x) = x$. *Entonces* $I = \langle g, \psi \rangle$. *Tenemos* $\psi'(x) = 1$, $\psi''(x) = 0$,

$$\langle g''(x), \psi(x) \rangle = \langle g, \psi'' \rangle = \langle g, 0 \rangle = 0,$$

pero esto no lleva a nada.